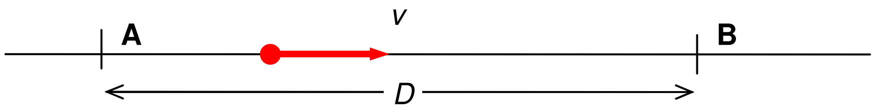
Diferencias entre los tiempos medidos en movimiento y en reposo.

Supongamos que nos movemos a lo largo de una línea recta, partiendo desde un punto **A** y hasta otro **B**:



Imaginemos que la velocidad que tenemos es cercana a la de la luz, digamos

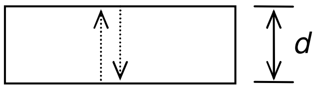
$$v = 240.000 \text{ km/s.}$$

Con ello, si tardamos *1 h* en llegar, quiere decir que el espacio es:

$$D = 240.000 \times 3.600 = 864.000.000 \text{ km}$$

De la teoría de la relatividad, si en **A** hay un reloj que marca las 9:00 al momento de partir, como el viajero se mueve, vamos a ver que cuando llegue a **B**, donde hay otro reloj (que se supone es *sincrónico con el de* **A**), comprobará que para él *ha transcurrido menos de una hora*. Esto equivale a decir que *su reloj atrasa*.

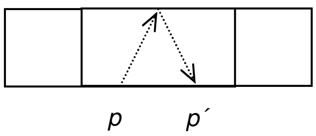
Para *demostrar esto*, vamos a usar un *dispositivo* o *aparato* auxiliar, consistente en un *haz de luz* (que puede provenir de una linterna, un láser o lo que se nos ocurra) que parte del piso del móvil, se dirige hacia el techo, donde hay un espejo, y allí se refleja:



Este dibujo muestra "lo que *ve el pasajero*".

Mientras viaja desde **A** hasta **B**, como la distancia *D* es muy grande comparada con el alto de su móvil, la luz irá hasta el techo y volverá al piso una gran cantidad de veces, dependiendo justamente de la altura, que llamamos *d.*

Por su parte, cualquier observador *externo* que esté *quieto respecto del camino*, no verá la misma trayectoria de la luz que el pasajero. Sino la siguiente:

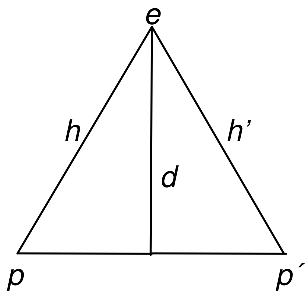


Para persuadirnos de ello imaginemos, en lugar de un haz de luz, un pasajero sentado que juega con una pelotita que lanza hacia el techo y la vuelve a recibir en un tren con ventana amplia y que vemos pasar cuando nosotros estamos en el andén.

Por lo tanto, *desde este punto de vista*, la luz recorre una distancia *mayor* que para el caso del viajero. Según Einstein: *la velocidad de la luz es absoluta*. Quiere decir que tanto para el pasajero como para el observador externo vale:

$$c = 300.000 \text{ km/s.}$$

Esto tiene una importante consecuencia: en un caso el haz recorre una distancia igual a dos veces la altura del móvil, es decir *2d*, y en el otro *dos veces la hipotenusa de los triángulos rectángulos de la figura anterior.*



Del *Teorema de Pitágoras:*

$$h^2 = (pp'/2)^2 + d^2,$$

Despejando *d*:

$$d^2 = h^2 - (pp'/2)^2$$

o bien:

$$d = [\ h^2 - (pp'/2)^2\ ]^{1/2}.$$

Ahora volvamos a nuestro problema: *demostrar que para el pasajero (que se mueve) el tiempo pasa <u>más lentamente</u> que para el observador externo (que "está quieto").* Esto tiene directa relación con lo que estamos viendo: *para el pasajero el haz de luz recorre una distancia <u>menor</u> que para el observador externo.* Como la velocidad de la luz *es un invariante para ambos*, ella es la que *relaciona las distancias con los tiempos.*

Escribamos la velocidad de la luz según la observación del pasajero:

$$c = 2\ d\ /\ t_p \qquad (1)$$

Aquí t_p es el *tiempo que mide el pasajero desde que la luz sale del piso, llega al espejo ubicado en el techo y regresa al piso.*

En cambio, el observador externo tiene otra expresión:

$$c = 2\ h\ /\ t_o \qquad (2)$$

donde t_o es el tiempo que mide el observador externo, *distinto de* t_p.

Comparando estas dos fórmulas:

$$d\ /\ t_p = \ h\ /\ t_o$$

como *d* y *h* no son iguales, t_p y t_o tienen que ser desiguales.

Su *relación* $t_p\ /\ t_o$ explica las diferencias de tiempos transcurridos para uno y otro observador, por lo que ahora la vamos a calcular, en forma genérica, mediante el siguiente razonamiento:

Como el observador *externo* determina que durante el tiempo t_o el haz de luz recorre

el trayecto $pep' = 2\ h$,

resulta que $h = c\ t_o/2$ de la fórmula (2).

Además, mientras esto ocurre, el móvil recorre una distancia $pp' = v\ t_o$.

Entonces:

$$d = [\ h^2 - (pp'/2)^2\ ]^{1/2} = [\ (c\ t_o/2)^2 - (v\ t_o\ /2)^2\ ]^{1/2} = t_o/2\ (c^2 - v^2\ )^{1/2}.$$

Pero, *desde el punto de vista del pasajero*:

$$d = c\ t_p/2.$$

Como esta altura es igual para *ambos,* resulta:

$$t_p = t_o/c\ (c^2 - v^2\ )^{1/2} = t_o\ (1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Reemplazando los valores que se dieron para *c* y para *v*:

$$t_p = t_o\ (1 - 0{,}8^2)^{1/2} = t_o\ (1\text{-}0{,}64)^{1/2} = t_o\ (0{,}36)^{1/2} = t_o\ 0{,}6.$$

Esto quiere decir que el tiempo que mide el pasajero es igual al 60 % del que mide el observador externo.

O sea que, volviendo al ejemplo del principio, si para el observador en el andén transcurre una hora, para el pasajero sólo pasaron *0,6 x 60´ = 36 minutos.*

Es decir que *el reloj del pasajero marcará las 9:36 mientras que el reloj en* **B** *marca las 10:00.*

Nota: Este trabajo fue realizado en base al libro de L. Landau y Y. Rumer, “Qué es la Teoría de la Relatividad”, publicado por EUDEBA.

En el mismo se observa que es erróneo el dibujo del triángulo CBA, debiéndose haber realizado en cambio en el sentido ABC.

Víctor José Passamai

Reglas sencillas para derivar

$$\frac{d}{dt}(cte) = 0$$

Ej: $\frac{d}{dt}(2) = 0$, $\frac{dc}{dt} = 0$
Función $x = t$
$\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$
Linealidad

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = (\frac{d}{dt}x_1 + \frac{d}{dt}x_2)$$

Derivada de un producto

$$\frac{d}{dt}(x_1 \times x_2) = (\frac{d}{dt}x_1)x_2 + x_1(\frac{d}{dt}x_2)$$

Ej: $\frac{d}{dt}(t^2) = \frac{d}{dt}(t \times t) = 2t\frac{dt}{dt} = 2t$
Función potencial general:

$$\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$$

Si $n = 1$: se verifica que $\frac{d}{dt}t = 1t^{1-1} = 1t^0 = 1$
Aceleración
Cambio de la velocidad con el tiempo

$$v = v(t) \Longrightarrow \exists\ a$$

Aceleración media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dimensiones

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(**pendiente** de la tg a la curva de $v(t)$ en t)
Derivada

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Derivada segunda

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Aceleración cero

$$a = 0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = cte.$$

Velocidad cte.

$$v = cte. \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$v = cte. \Leftrightarrow a = 0$$

$$v = cte. \Rightarrow pendiente = cte.$$

$$x(t) = v_o t + x_o$$

Movimiento con aceleración constante

Ej: $g = 9,81\ m/s^2$

Pendiente de $v(t)$ constante:

$$v = a_o t + v_o$$

Si

$$x(t_o) = x_o$$

y

$$x(t) = x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \Delta x = x - x_o \\ \Delta t = t - t_o \end{array} \Rightarrow v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_m \Delta t$$

$$\Delta x = v_m \Delta t \Rightarrow \Delta x = v_m\ t \text{ si } t_o = 0$$

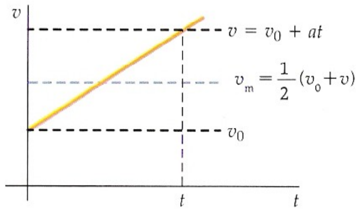


Figure 1:

$$\text{Si } a = cte. \Rightarrow v = v_o + at$$

De la figura:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_o + v)$$

Por lo tanto:

$$\Delta x = v_m t = \frac{1}{2}(v_o + v)\ t$$

$$\text{Pero } v = v_o + at$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(v_o + v_o + at)t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(2v_o t + at^2)$$

O sea:

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

Por otro lado:

$$v = v_o + at \Rightarrow t = \frac{v - v_o}{a}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_o t + \frac{1}{2}at^2 = \\ &= v_o \left(\frac{v - v_o}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_o}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\Delta x &= v_o v - v_o^2 + \frac{1}{2}\left(v - v_o\right)^2 = \\ &= \underline{v_o v}\overline{-v_o^2} + \frac{1}{2}v^2\underline{-v v_o}\overline{+\frac{1}{2}v_o^2} = \\ &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_o^2 \end{aligned}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$$

Resumen de ecuaciones

Si $x_o = 0$:

$$\begin{aligned} x &= v_o t + \frac{1}{2}at^2 \\ v &= v_o + at \\ v^2 &= v_o^2 + 2ax \end{aligned}$$

Extras

$v_m = \frac{1}{2}(v_o + v)$

$x = \frac{1}{2}(v_o + v)t$