

Tutorial para el cálculo de errores

1 Resumen

Se presentan fórmulas básicas de la teoría de errores que permiten evaluar datos obtenidos de la medición *directa* y repetida de una longitud. Con la medición directa se evalúa otra que depende de ella a través de una fórmula (medición *indirecta*).

Se calcula, por aplicación de una fórmula de *propagación de errores*, el error de la magnitud indirecta, a partir del error de la directa.

Se desarrollan los métodos de cálculo y se comparan resultados.

2 Introducción

En el laboratorio suele tener que obtenerse un *valor* asociado a una *magnitud*, por ejemplo: $l = 0,17\text{ m}$; $t = 0,2\text{ s}$; etc.

En el práctico de laboratorio que vamos a desarrollar se ha medido diez veces la longitud de una regla que, dejada caer entre los dedos índice y pulgar de un compañero, éste la sujeta antes que toque el suelo. Es lo que se denomina método para determinar el *tiempo de reacción*.

Se prepara una tabla con indicación de las denominaciones de los datos que se van a tomar:

n	$h(m)$	$h - \bar{h}$	$(h - \bar{h})^2$
1			
2			
$\vdots$	h_i	$h_i - \bar{h}$	$(h_i - \bar{h})^2$
N			
	$\sum_{i=1}^{i=N} h_i$		$\sum_{i=1}^{i=N} (h_i - \bar{h})^2$

Donde:

n : es el número de orden de la medición

$h(m)$: es la longitud medida en metros

$\bar{h}$: es el valor promedio de las longitudes medidas

N : es el número total de veces que se mide

Además, los datos se procesan usando las siguientes fórmulas (y nombres):

$$\text{Promedio: } \bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} h_i}{N}$$

$$\text{Desviaciones: } \delta_i = \bar{h} - h_i$$

$$\text{Desviación media: } \bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \delta_i}{N}$$

$$\text{Error cuadrático medio: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} \delta_i^2}{N}}$$

$$\text{Error cuadrático medio del promedio: } \Delta \bar{h} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} \delta_i^2}{N(N-1)}}$$

Luego, la expresión de la longitud medida es:

$$h = \bar{h} \pm \Delta \bar{h}$$

y el error porcentual respectivo:

$$\varepsilon\% = 100 \frac{\Delta \bar{h}}{\bar{h}}$$

3 Estudio del caso

En el caso que consideramos, los datos obtenidos por los alumnos durante la práctica y procesados con sus números de cifras adecuados, serán mostrados en la siguiente tabla:

n	$h(m)$	$h - \bar{h}$	$(h - \bar{h})^2$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
$\Sigma:$			

El cálculo de $\bar{h}$ resulta $\bar{h} = \quad m$ y para $\Delta \bar{h} = \quad m$. Entonces:

$$h = \bar{h} \pm \Delta \bar{h} = (\quad \pm \quad) m$$

Observemos lo siguiente:

1°) La *apreciación* del instrumento es de $\quad m$, por lo que la cantidad de *cifras significativas* es de $\quad$.

2°) Al hacer el cálculo de la suma de h , desde h_1 a h_{10} se obtiene una cifra significativa más, pues $\sum_{i=1}^{i=10} h_i = \quad$. Al dividir por 10, en el cálculo del promedio, este número diez es exacto, entonces el resultado tiene *cuatro* cifras significativas, una más que cada sumando.

Expresar el resultado como:

Mientras que, si calculamos $\Delta \bar{t}$ con una sola cifra decimal:

$$t = (0, \text{---} \pm 0, 0\text{---}) \text{ s}$$

y el error porcentual resulta:

$$\varepsilon_t \% = 100 \frac{0, 0\text{---}}{0, \text{---}} = \text{---} \%$$

5 Propagación de errores

Utilizaremos herramientas que el estudiante entenderá más adelante, cuando haya aprendido a derivar.

Diremos que, al ser $t = t(h) = \sqrt{2h/g}$ resulta

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow \Delta t \approx \frac{\Delta h}{\sqrt{2gh}}$$

Entonces, el cálculo de $\bar{t}$ se realiza mediante

$$\bar{t} = t(\bar{h}) = \sqrt{\frac{2\bar{h}}{g}}$$

y el de $\Delta \bar{t}$ se hace igual a Δt , aproximado por la fórmula anterior, de la siguiente manera:

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta \bar{h}}{\sqrt{2g\bar{h}}}$$

Para nuestros datos, como resulta que:

$$h = \bar{h} \pm \Delta \bar{h} = (0, \text{---} \pm 0, 0\text{---}) \text{ m}$$

reemplazando: $\bar{t} = \sqrt{\frac{2 \times 0, \text{---}}{9,81}} = 0, \text{---} \text{ s}$ y $\Delta \bar{t} = \frac{0, 0\text{---}}{\sqrt{2 \times 9,81 \times 0, \text{---}}} = 0, 00 \text{---} \text{ s}$. Luego:

$$t = (0, \text{---} \pm 0, 0\text{---}) \text{ s}$$

Este tiene un error porcentual dado por: $100 \times 0, 0\text{---}/0, \text{---} = \text{---}$

$$\varepsilon_t \% = \text{---} \%$$

Si se calcula con una sola cifra significativa en el error, da por resultado:

$$t = (0, \text{---} \pm 0, 0\text{---}) \text{ s}$$

y el error porcentual respectivo resulta ser: $100 \times 0, 0\text{---}/0, \text{---} = \text{---} \%$.

6 Conclusiones

Tanto uno como otro método, es decir, el uso de fórmulas para medir magnitudes indirectas y el cálculo del promedio de las magnitudes y su error cuadrático medio; como mediante la propagación de errores, dan resultados similares.

El último método es más rápido en cuanto a los cálculos.

La determinación del tiempo de respuesta de una persona dió por resultado un valor de aproximadamente $0, \text{---}$ segundos, con un error del $\text{---} \%$.

$$\textbf{Recordar: } t_{rta} \approx \frac{1}{10} \text{ s} = \frac{1}{5} \text{ s}.$$