RESOLUCION DE PROBLEMAS

Víctor Passamai

Resumen

Se presentan algunos elementos relacionados al tema, basados fundamentalmente en los trabajos de Polya (6) y Machado (4).

Para ilustrar la teoría se ejemplifica con la resolución de tres problemas diferentes: uno de ingenio, otro un poco más elaborado –pero expresado de la manera que lo concibió un sabio tan antiguo como Sócrates- y, el tercero es el teorema de Pitágoras que se plantea como un problema resoluble a partir del anterior.

Se propone la experiencia de realización de concursos de resolución de problemas, como una manera de invitar al estudiante al ejercicio mental por medio de la inducción del razonamiento para resolver problemas de ingenio, acertijos o rompecabezas. Una lista de éstos es anexada al final a fin de presentar material suficiente para otras experiencias similares.

Se explica de qué manera puede ser aplicada la enseñanza de la teoría de la resolución de problemas en la secundaria y, eventualmente, en los primeros años de la universidad. Se particulariza en el área de los problemas de Física por ser en ésta última disciplina donde se aplicó una experiencia específica. Se descuenta la utilidad del método en las Ciencias Exactas en general.

1.- INTRODUCCION

Un problema consta de datos que lo definen y una incógnita que debe ser expresada en función de los primeros. Resuelto el problema, la incógnita pasa a jugar el papel de un dato más y puede darse lugar a otro problema nuevo si se quita uno cualquiera de los datos.

No existe una metodología general para resolver problemas pero algunos autores coinciden en ciertos aspectos relativos a los pasos que normalmente se dan para arribar a su solución.

Polya (6) dice que el camino adecuado se basa en el cumplimiento de cuatro etapas: 1) entender el problema, 2) encontrar la conexión entre datos relevantes e incógnitas mediante la realización de un "plan" de la solución, 3) llevar a cabo el plan, revisando cada paso del proceso de razonamiento empleado y 4) volver atrás para examinar la solución obtenida sometiéndola a la verificación. Este autor propone el uso de una lista de preguntas que cada interesado debe responder toda vez que deba resolver un problema de Matemática, dejando por sentado que la metodología puede extenderse a otras ciencias.

En otro trabajo (7) el mismo autor expresa que la resolución de problemas es un arte que, al igual que el nadar o esquiar o tocar el piano, sólo se puede aprender por la imitación o la práctica. Se considera que una vez entendida esta actividad podrá ser enseñada y, por lo tanto, la habilidad para resolver problemas será factible de mejorar. Según Polya, para sacar el máximo de provecho del esfuerzo puesto en resolver un dado problema, se debe prestar atención a las características notables del mismo que puedan ser útiles para el manejo de los casos futuros. "Una solución que usted haya obtenido mediante su propio esfuerzo o una que haya leído u oído, pero que haya seguido con real interés y profundidad, puede ser "un patrón" para usted, un modelo para resolver problemas similares." Una vez resuelto un problema dado, se tiene material de base para resolver otros.

Machado (4) va un poco más allá pues dice: "Es importante que conozcamos nuestros pensamientos, pero lo es más el que conozcamos la manera de llegar a ellos..."

"Un problema se resuelve mediante la aplicación de un esquema utilizado con anterioridad en otro problema. Los pasos que da la mente para resolver un problema son, en términos esquemáticos los que se señalan a continuación:

Se separan todos los aspectos del problema que no tienen importancia fundamental para que él sea lo que es; mediante un proceso de abstracción se considera sólo esencial del mismo (a se convierte en A).

Se equipara el problema, ya simplificado, a otro problema para el que se posee una solución (A se convierte en B). Se encuentra esa solución (Zº), que figura en el conjunto de fórmulas de que se dispone (Xº,Yº,Zº). Se aplica la solución encontrada, modificándola adecuadamente, al problema que sirve de modelo (se pasa de Zº a Z´ y se aplica ésta a A).

Si Z´ es aplicable a *A*, una segunda modificación de ésta, Z, será aplicable a *a*, el problema que debe ser resuelto tal como se presentó originalmente (Z se aplica a *a*).”

El objetivo de este trabajo es mostrar que no sólo el viejo problema ya resuelto sino también la *actitud* (2) tomada para el plantearlo y resolverlo tiene que servir de experiencia para afrontar los subsiguientes.

2.- UN PROBLEMA DE INGENIO

Para explicar cómo se debe proceder ante un problema se trata una cuestión para la cual no son necesarios conocimientos especiales previos, salvo los que pueda prover un buen sentido común. El enunciado dice así: Se dispone de una habitación dentro de la cual se encuentran seis tanques de 200 litros de capacidad cada uno, numerados de la manera que se muestra en la Figura 1. Los recipientes sin primas se suponen llenos con tres ácidos diferentes: el 1 con HCl, el 2 con H_2SO_4 y el 3 con HNO_3. Se desea unir cada uno de éstos recipientes llenos con los respectivos vacíos, es decir el 1 con el 1´, etc.; de modo tal que se puedan transvasar los fluidos mediante tres mangueras perfectamente extensibles y elásticas que se numeran I, II y III para hacerlas corresponder con los pares de recipientes de igual número. Una vez comunicados los recipientes, los líquidos pasarán por efecto de vasos comunicantes, quedando como lo muestra la Figura 2. Se pide dibujar la disposición que deben tener las mangueras de modo tal que se cumpla con el pedido y que no ocurra que una pase por encima de la otra (Figura 3). Se supone que los tanques que se encuentran contra las paredes no se pueden correr con lo cual la posibilidad de pasar las mangueras por detrás (Figura 4) no es viable. Se pueden correr los tanques situados en el medio, debiéndose arribar a la posición inicial (Figura 1) una vez encontrada la solución .

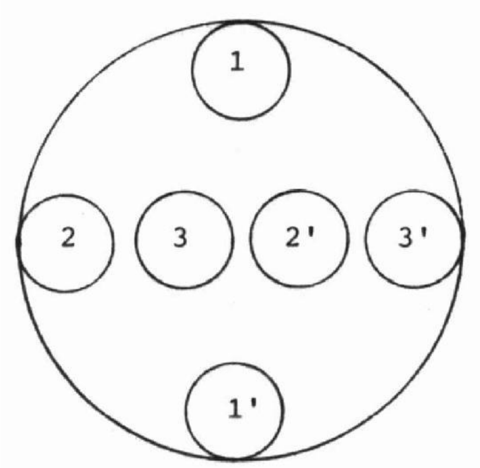


Figura 1

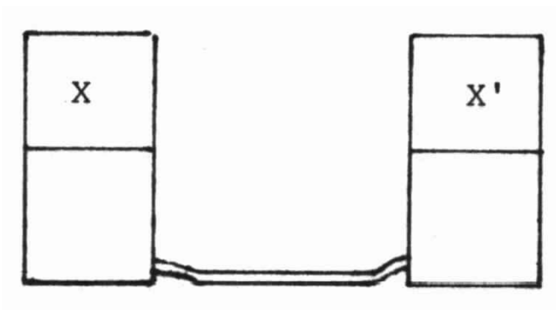


Figura 2

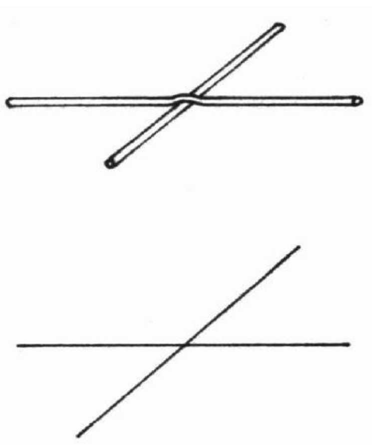


Figura 3

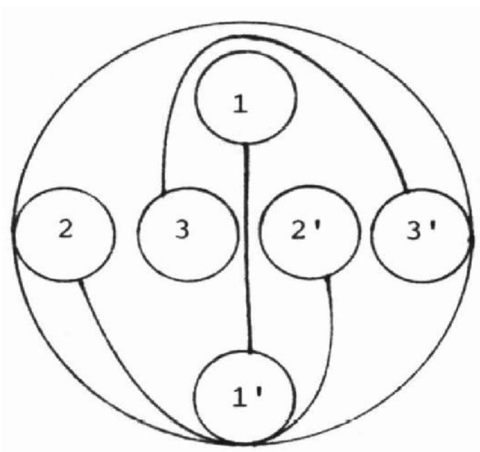


Figura 4

Etapa de comprensión del problema.

Para comprender plenamente el problema, se lee atentamente el enunciado, haciendo algunos dibujos auxiliares que muestren en forma simplificada lo que se busca resolver. Se debe entender cuáles son los datos y cual es la incógnita. Si se tratara de un problema matemático o físico se usaría una nomenclatura adecuada a fin de indicar dichos datos con las primeras letras del abecedario y a la incógnita con *x*, por ejemplo. Para el caso que estamos tratando, se puede decir que la incógnita es "la disposición que permite unir los tanques sin que las mangueras se crucen y que no ocurra lo que muestra la Figura 3 o la 4 o aún la 5".

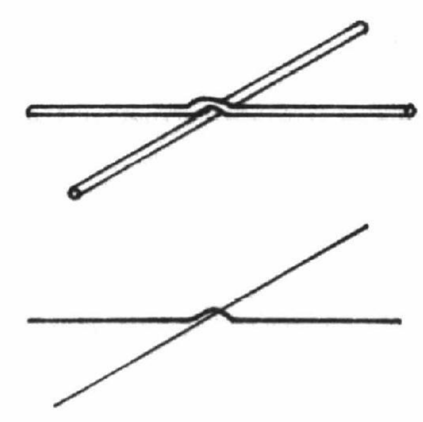


Figura 5

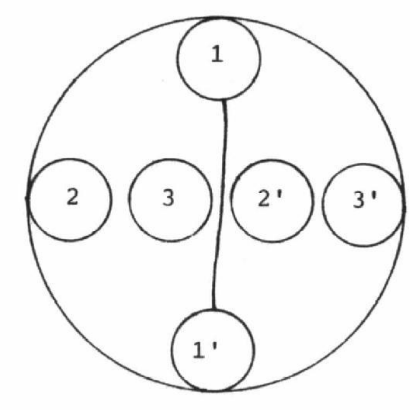


Figura 6

Realización de un plan de la solución.

En este paso se continúa haciendo uso del lápiz y papel para lograr un bosquejo que acerque lo mas posible los datos a la incógnita. En el límite, esta última dejará de serlo. Para ello se hace uso de las relaciones que vinculan los datos entre sí y con la incógnita. En el caso de un problema de las ciencias exactas o ingeniería, las relaciones serían ecuaciones que provienen de las condiciones geométricas, restricciones de tipo físico, etc. Para este caso se hacen algunos intentos que permitan llegar a la solución por prueba y error. Por ejemplo, de acuerdo al enunciado del problema se pueden unir los recipientes 1 y 1´ de modo que la disposición sea la que se muestra en la Figura 6. Evidentemente esto corta toda posibilidad de unión para los otros dos pares. Se podría intentar hacerlo como lo indica la Figura 7, pero nuevamente se observa que esta no es la solución...

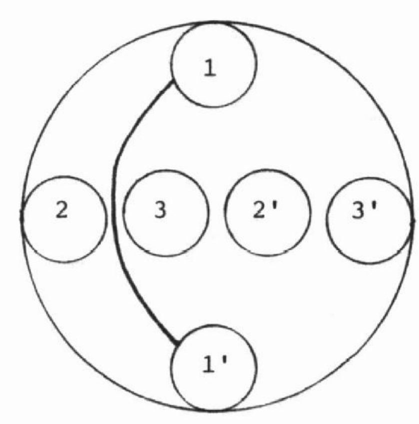


Figura 7

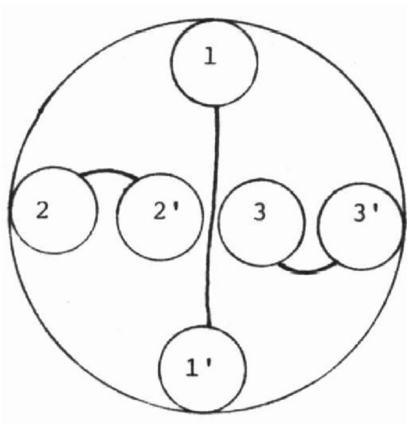


Figura 8

Es fundamental usar todos los datos y, si los hay en exceso como en este caso, se deben obviar o darles la importancia relativa que tengan

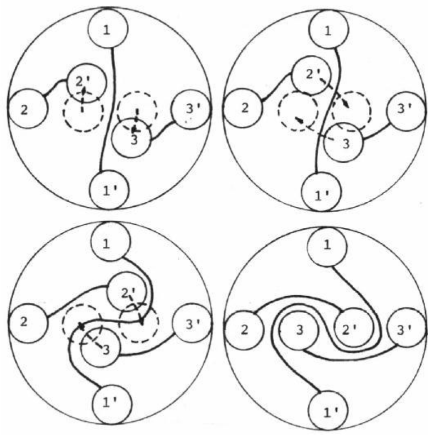
Ejecución del plan.

Este es el paso que se debe llegar dar para encontrar la solución al problema o, decididamente, a decir que no la tiene.

Si se tratara de un caso de las ciencias exactas o ingeniería, se cuenta ya con una información que fue provista por el anterior paso: gráficos, esquemas, fórmulas, datos experimentales, etc. Es conveniente aquí rever lo realizado con anterioridad, revisando minuciosamente el enunciado y los planes realizados hasta ese entonces.

Por ejemplo, si "se pueden correr los tanques situados en el medio..." se podría pensar en pasar de la disposición de la Figura 8 a la de la Figura 1 en forma progresiva, como lo muestra la Figura 9. Se ve entonces que el problema queda resuelto.

Es importante observar que un problema auxiliar puede permitir un camino que conduzca a la solución del planteado inicialmente. La Ref. 4 provee de algunos argumentos por los cuales se podría pensar que es muy difícil resolver un problema absolutamente nuevo si no se tienen los medios de relación que lo vinculen con un problema anteriormente ya resuelto con el cual se pueda asociar. La idea brillante por la cual se puede pasar de la figura 1 a la 9 sin necesidad de las intermedias no debe ser excluida como posible.



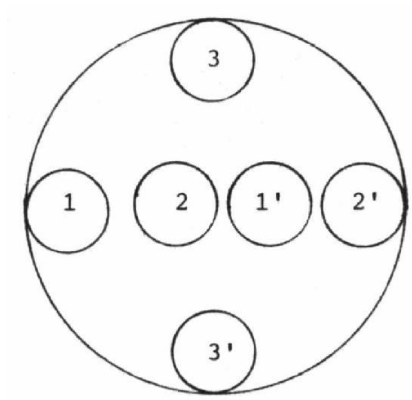


Figura 9 Figura 10

Volviendo atrás.

Este paso es de fundamental importancia cuando se puede sacar el máximo de provecho del esfuerzo realizado para resolver un problema. Para los casos numéricos se reemplaza la incógnita como dato y, si todo fue realizado correctamente se llegará a encontrar exactamente el mismo valor para los datos primitivos, suponiendo una cierta reversibilidad o simetría del problema. Es decir, se debe verificar la validez de la solución dada. También podrá explicarse el porqué de los procedimientos seguidos o los errores cometidos. Para el problema anterior podría decirse que el error que se comete al dibujar la figura 6 proviene del hecho que es natural la tendencia a confundir números cardinales con ordinales, como si 1 y 1´ significaran “unir primero 1 con 1´”. Distinto hubiera sido quizás planear el problema indicado en la figura 10 en lugar de la 1.

3) EL PROBLEMA DE SÓCRATES Y EL ESCLAVO

Un problema auxiliar para resolver el teorema de Pitágoras, mediante algún método sencillo y didáctico, es el que se transcribe a continuación (5), en lo que corresponde al planteo de duplicar el área de un cuadrado mediante la construcción, sobre los trazos de la primera, de otra figura de la misma forma. La parte inicial del diálogo puede leerse en el Anexo I.

Sócrates:- Quedábamos en que teníamos aquí un espacio de cuatro pies, ¿no es esto? (en la Figura 11 le muestra el cuadrado de área inicial).
Esclavo:- Sí.

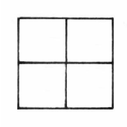
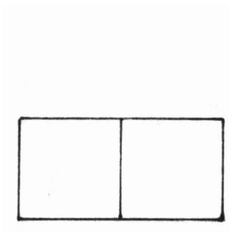
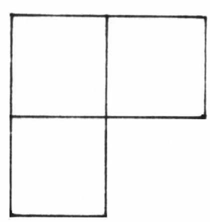
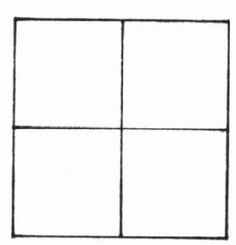





Figura 11 Figura 12 Figura 13 Figura 14

En lo que resta se abrevia la palabra Sócrates mediante “S.” y Esclavo con “E.”.

S.:- Al que podemos añadir este otro que le es igual, ¿no es esto? (Figura 12, en la que le da la idea de duplicación del área).
E.:- Sí.
S.:- Y aún este otro, igual a cada uno de los dos anteriores, ¿verdad? (Figura 13).
E.:- Sí.

S.:- Y en seguida llenar este espacio que queda vacío (Figura 14).
E.:- Por supuesto.
S.:- ¿Y no tenemos ahora cuatro espacios iguales?.
E.:- Sí.
S.:- ¿Y cuántas veces los cuatro juntos son más grandes que éste? (Figura 11).
E.:- Cuatro.
S.:- Pero lo que buscábamos era un espacio doble, ¿recuerda?.
E.:- Claro que recuerdo.

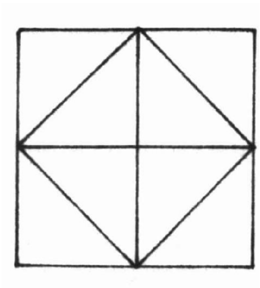


Figura 15

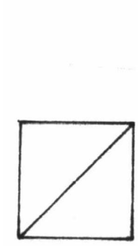


Figura 16

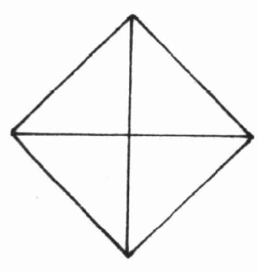


Figura 17

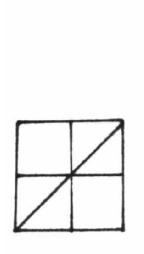


Figura 18

S.:- Y esta línea que trazamos de un ángulo a otro en cada cuadrado (Figura 15), ¿no los corta en dos partes iguales? .
E.:- Sí.
S.:- Pues aquí tenemos cuatro líneas iguales que forman un nuevo cuadrado.
E.:- Ya lo veo.
S.:- Piensa ahora, ¿en qué a disminuido este cuadrado? (figura 14).
E.:- No sé.
S.:- Vamos a ver, ¿ha separado o no cada una de estas líneas en cada uno de los cuadrados una mitad hacia adentro? (figura 15).
E.:- Sí.
S.:- ¿Y cuántas mitades de éstas hay en el cuadrado que resulta en el centro?.
E.:- Cuatro.
S.:- ¿Y en este ? (Figura 16).
E.:- Dos.
S.:- ¿Y qué es cuatro respecto a dos?.
E.:- El doble.
S.:- ¿cuántos pies tiene, pues, este cuadrado? (Figura 17).
E.:- Ocho.
S.:- ¿Y sobre qué línea está construido?.
E.:- Sobre ésta.
S.:- ¿Sobre la línea que va de un ángulo a otro en el cuadrado de cuatro pies? (Figura 18).
E.:- Sí.

Es así como la Figura 15 servirá como medio de relación para vincular este problema ya resuelto con el que se enuncia en la sección siguiente.

4. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

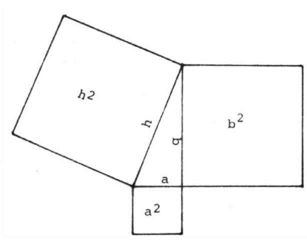


Figura 19

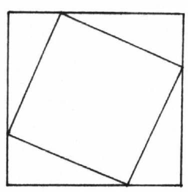


Figura 20

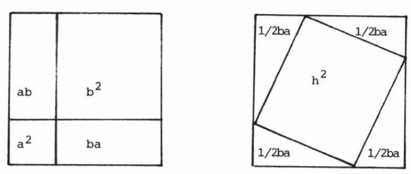


Figura 21

A diferencia del anterior, que es el teorema aplicado al caso especial en que los catetos son iguales, se quiere demostrar ahora que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre el cateto menor más el correspondiente al mayor, es igual al que se construye sobre la hipotenusa (Figura 19).

Se seguirán los pasos indicados por Polya (6) para resolverlo, el cual es muy similar al que emplea Sócrates con el esclavo (el de la dialéctica).

"¿Cuál es la incógnita?"

El área construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, consistente en un cuadrado de lado igual a dicha hipotenusa.

"¿Cuáles son los datos?"

La base y la altura del triángulo (catetos).

"¿Cuál es la relación entre datos e incógnita?"

Introduciendo la notación "*h*" para la incógnita, "*b*" y "*a*" para los datos, se debe demostrar que

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Método analítico:

"Trate de resolver primero algún problema relacionado".

Aquí conviene observar la Figura 15 que muestra un caso particular y que se puede emplear para realizar la Figura 20 que es la generalización de la anterior. Usando la notación mencionada para mostrar los datos del triángulo y mediante un truco "de ingenio", se debe ver que la superficie del cuadrado de lado $a + b$ es igual a la suma de la de cuatro triángulos y un cuadrado que se encuentran inscriptos en el primero (Figura 21). Sabiendo que la superficie del cuadrado de lado $a + b$ es

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad \text{(parte izquierda de la Figura 21)} \qquad (1)$$

y que, como la de cada triángulo es: $\frac{1}{2}\,ba$, será:

$$(a + b)^2 = 4(\tfrac{1}{2}\,ba) + h^2 = 2ab + h^2 \qquad (2)$$

Como los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) son la misma cosa los segundos lo serán entre sí:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + h^2$$

ecuación ésta que muestra el término *ab* en ambos miembros y que, si se suprime de ambos a la vez, dará por resultado la ecuación buscada:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Método gráfico

La Figura 22 muestra una secuencia gráfica para llegar al mismo resultado. Partiendo desde una figura exactamente igual a la número 20, se toman los triángulos A y B y se los desplaza dentro del cuadrado de superficie h^2 para hacer que coincidan sus diagonales con las de A' y B'. Borrando las líneas diagonales queda determinada la figura de la derecha y, a partir de ésta, "simplificando superficies iguales" (los triángulos A y A' con el paralelogramo de superficie *ab* y los B y B' con el de superficie *ba*), resulta lo buscado.

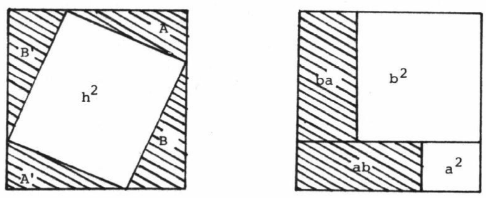


Figura 22

5. LOS CONCURSOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIO

Se llamó a concurso a los alumnos de la Universidad, sin distinción de carreras pero con preferencia para los que cursaban los primeros años, para que, en tres etapas, una cada día, resolvieran problemas del tipo de los mostrados en el Anexo II. La reglamentación que se creyó conveniente establecer pedía que se expusieran todos los pasos y razonamientos realizados para lograr la respuesta. La participación podía ser en forma personal o en pareja, prefiriéndose esta última para inducirlos a discutir entre ellos. En los dos primeros días, el tiempo inicial estipulado para el concurso era de una hora, el cual podía ser prolongado o acortado hasta que la mitad de los participantes hubiera finalizado. De cualquier forma el tiempo máximo era de una hora y media. Para el tercer día el concurso tomaría en cuenta el tiempo de resolución de la siguiente forma: los primeros cuarenta minutos eran para resolver en forma normal, luego comenzaba la entrega de los trabajos y, por cada cinco minutos de atraso, se descontaba un punto. A las dos horas todos debían haber entregado sus hojas de trabajo con el descuento correspondiente. Estas cláusulas se pusieron para simular el trabajo en contra-reloj a que se ven sometidos los alumnos cuando realizan un examen escrito real. La calificación era de 0 a 10 para cada problema y el puntaje total resultaba ser la suma de los obtenidos durante los tres días.

6. LA EXPERIENCIA APLICADA A UN CURSO DE FÍSICA

Con el objeto de enseñar a los alumnos a plantear y resolver los problemas de la materia, se comenzó con la resolución de problemas de ingenio durante la primera clase de cursado de la materia Física I. Como en este caso el interés no se centraba en la realización de una competencia, se redujo la cantidad de problemas a un tercio del total anterior, totalizando diez enunciados. El tiempo empleado fue de una hora y, a continuación, se explicaron los fines que se perseguían con tal prueba.

En la clase siguiente se presentaron problemas de ingenio, pero aplicados a la Física. Estos se buscaron entre los que pueden ser resueltos mediante la realización de algunas pocas cuentas de modo que sean una transición entre los anteriores (Anexo II) y los habituales problemas “arduos y aburridos” (ver Anexo III).

A partir de la tercera clase práctica de resolución de problemas, el contenido de las guías de trabajos prácticos fue el mismo que el habitual (problemas planteados por los distintos autores de la bibliografía que se usa en los primeros cursos de Física) y, además, se entregaron guías de problemas resueltos que consistían en una complicación de los problemas que se suelen presentar a continuación de la exposiciones de tipo teórico o abstracto, como aplicación concreta de lo antes expuesto.

Para el curso de Física II se suprimieron las guías resueltas, entregándose solo las de problemas planteados.

7. RESULTADOS

Respecto de los concursos de resolución de problemas:

Se observó una total participación y entusiasmo por parte de los concurrentes, demostrando así el interés por ese tipo de actividad.

Se encontró que el pedido de explicación de los razonamientos en forma escrita no había sido cumplido por la mayoría y, los que así lo habían hecho, evidenciaban dificultades en la correcta expresión de sus pensamientos.

El fin primordial perseguido, que es ayudar al estudiante a encontrar la vía del razonamiento en lugar de la memorización -a que se suele acostumbrar al alumno de la escuela media- y el logro de la dedicación al estudio en forma mas entusiasta, se estima que fue apenas cumplido aunque no se realizó seguimiento alguno sobre los participantes. La segunda etapa que consistía en el dictado de un curso mas formal para demostrar la actitud que se debe tener en la tarea de resolver problemas (6, 4, 7, 2) y los pasos seguidos para ello no fue realizada.

Para el curso de Física:

Se verificó, al igual que en el caso anterior, que los acertijos y juegos de ingenio sirvieron para infundir el entusiasmo inicial necesario para un buen comienzo.

Los problemas de transición, fueron resueltos con la misma dedicación que se les dio a los anteriores.

Sobre la base del concurso inicial el 72 % de los alumnos de Física I regularizó la materia. El 60 % lo hizo con Física II.

8. MÉTODO SUGERIDO

La generalidad de los estudiantes asume una postura poco decidida ante los problemas que se les plantea: luego de leer apresuradamente el enunciado –seguramente sin entenderlo- levantan la mirada para dar por terminado el asunto con un “no lo entiendo” o “es muy difícil para mí” y si se trata de un examen o prueba escrita, la búsqueda se orienta hacia algún método ilícito para obtener la solución.

Asumiendo la responsabilidad que corresponde, es de esperar que la situación arriba mencionada es debida a la mala formación que recibe el individuo en las aulas.

Dejando de lado aquello de que "el poder de la enseñanza es a veces insuficiente, salvo en aquellos casos felices en que es casi superflua" (3) y aceptando que cada persona dispone de los medios de relación que le permiten resolver un problema partiendo de datos conocidos; el papel del docente es fundamental: el profesor debe ayudar sin perturbar al alumno que no está capacitado para hacer su trabajo poniéndose en su lugar haciéndole la mismas preguntas que a él se le pudieran ocurrir (6).

Si el profesor dedica su tiempo de trabajo para instruir a sus alumnos en operaciones de rutina les estará matando su interés pues de esa forma entorpecerá su desarrollo intelectual haciendo un mal uso de sus oportunidades. Pero si él desafía la curiosidad de sus alumnos dándoles problemas proporcionales a sus conocimientos y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, les proporcionará la forma de llegar a pensar independientemente y a adquirir el gusto por ello (6).

Se debe hacer una advertencia importante: en la resolución de problemas no siempre el conocimiento del mecanismo que puede regular la llegada a la solución es positivo. Existe latente el peligro de que la toma de conciencia de dichos pasos distraiga la atención entorpeciendo la tarea por dispersar fuerzas que debieran concentrarse en el trabajo de resolver y no en el de la auto-observación para saber si se lo está haciendo bien. Nuevamente es al docente al que le toca poner atención en este punto para evitar errores.

Cuando se trata de llevar un curso de modo tal se logre un buen rendimiento y nivel es indudable la importancia que tiene la presentación del mismo en el primer día de clase. Los acertijos y juegos de ingenio servirían para infundir el entusiasmo inicial necesario para un buen comienzo. Dichos problemas deberán ser cambiados por los específicos en la materia en forma gradual (ver Anexo III) de modo que, en un momento dado, la totalidad de los mismos consista en los problemas "arduos y aburridos" del curso normal.

Se pondrá énfasis en que si se mide la capacidad de resolver problemas por la aptitud que posee una persona para relacionar conceptos diversos (datos) para llegar a un nuevo concepto (incógnita) generado a partir de los primeros, se podría aumentar dicha capacidad aumentando la agilidad para relacionar. ¿Cómo?, simplemente entrenando al individuo en la actividad propuesta, empezando con problemas que no requieran mayores conocimientos especializados, salvo los que provee un buen sentido común.

Se hará notar que para resolver los problemas de Física es necesario contar con algo más que un buen sentido común, es decir, "hay que conocer el puñado de leyes básicas" (1) que, bien empleadas, son las armas que permiten resolver los problemas particulares. Sumando a éstas el conocimiento del procedimiento de cómo hacerlo -que, como se señaló antes, en general no se enseña o muestra- aumentará la posibilidad de llegar a los resultados esperados.

9. REFERENCIAS

(1) Alonso, M. y Finn, E.: "Física. Vol. I Mecánica". Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1970.

(2) Davis, G.A. y Scott, J. A.: "Estrategias para la creatividad". Paidós. 1975.

(3) Feynman, R.: "Feynman´s Lectures on Physics". Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1971.

(4) Machado, L. A.: "La revolución de la inteligencia". Seix Barral, Barcelona. 1975.

(5) Platón: "Diálogos". Ediciones Ibéricas. Madrid. (Capitulo correspondiente al "Menón").

(6) Polya, G.: "How to solve it". Anchor Book A 93, Doubleday. 1957.

(7) Polya, G.: "Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving". John Wiley & Sons, Inc. 1967.