TUTORIAL 6: RESOLUCION DE PROBLEMAS

Resumen

Se resuelven tres problemas diferentes: uno de ingenio, otro un poco más elaborado –como lo hiciera Sócrates- y, el tercero es el teorema de Pitágoras, resoluble a partir del anterior.

Se explica de qué manera se aplica la resolución de problemas en los primeros años de la universidad. Se aplica a problemas de Física y Ciencias Exactas en general.

INTRODUCCION

Un problema consta de: **datos** que lo definen y una **incógnita** que debe encontrarse en función de los primeros.

Pasos que normalmente se dan para arribar a una solución:

Polya (6) dice:

1) **Entender** el problema, 2) encontrar la conexión entre datos e incógnita mediante un "**plan**" de solución, 3) **ejecutar** el plan, revisando cada paso del razonamiento empleado y 4) volver atrás para **verificar** la solución.

En otro trabajo (7) el mismo autor expresa que la resolución de problemas es un arte que, al igual que el nadar o esquiar o tocar el piano, sólo se puede aprender por la imitación o la práctica. Una vez entendida esta actividad, la habilidad para resolver problemas será factible de mejorar. Una vez resuelto un problema dado, se tiene material de base para resolver otros.

Machado (4) va un poco más allá pues dice: "Es importante que conozcamos nuestros pensamientos, pero lo es más el que conozcamos la manera de llegar a ellos..."

"Un problema se resuelve mediante la aplicación de un esquema utilizado con anterioridad en otro problema.

El objetivo de este trabajo es mostrar que no sólo el viejo problema ya resuelto sino también la *actitud* (2) tomada para el plantearlo y resolverlo tiene que servir de experiencia para afrontar los subsiguientes.

UN PROBLEMA DE INGENIO

Para explicar cómo se debe proceder ante un problema se trata una cuestión para la cual no son necesarios conocimientos especiales previos:

Se dispone de una habitación dentro de la cual se encuentran seis tanques de 200 litros de capacidad cada uno, numerados de la manera que se muestra en la Figura 1, vistos desde arriba. Los recipientes sin primas se suponen llenos con tres ácidos diferentes: el 1 con HCl, el 2 con H_2SO_4 y el 3 con HNO_3. Se desea unir cada uno de éstos recipientes llenos con los respectivos vacíos, es decir el 1 con el 1´, etc.; de modo tal que se puedan transvasar los fluidos mediante tres mangueras perfectamente extensibles y elásticas que se numeran I, II y III para hacerlas corresponder con los pares de recipientes de igual número.

Una vez comunicados los recipientes, los líquidos pasarán por efecto de vasos comunicantes, quedando como lo muestra la Figura 2. Se pide dibujar la disposición que deben tener las mangueras de modo tal que se cumpla con el pedido y que no ocurra que una pase por encima de la otra (Figura 3). Se supone que los tanques que se encuentran contra las paredes no se pueden correr con lo cual la posibilidad de pasar las mangueras por detrás (Figura 4) no es viable. Se pueden correr los tanques situados en el medio, debiéndose arribar a la posición inicial (Figura 1) una vez encontrada la solución.

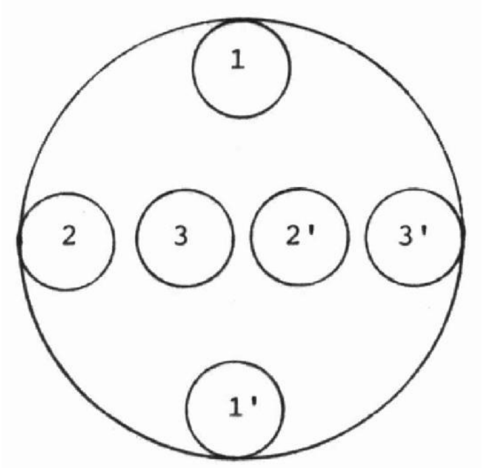

Figura 1

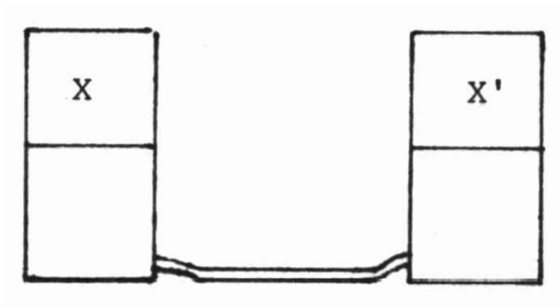

Figura 2

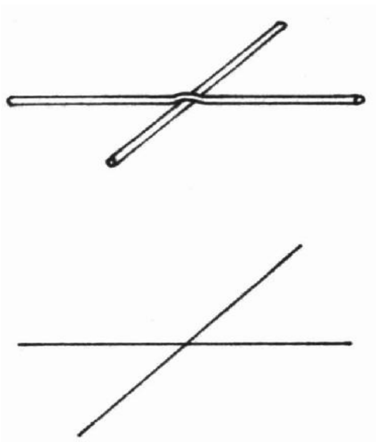

Figura 3

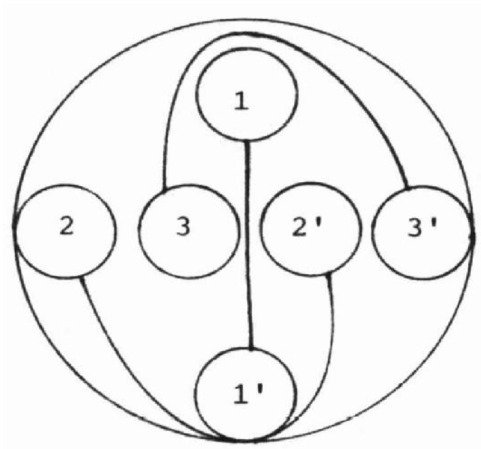

Figura 4

Etapa de comprensión del problema.

Para comprender el problema, se lee atentamente el enunciado, haciendo algunos dibujos auxiliares que muestren lo que se busca resolver. La incógnita es “la disposición que permite unir los tanques sin que las mangueras se crucen”.

Realización de un plan de la solución.

En este paso se continúa haciendo uso del lápiz y papel para lograr un bosquejo que acerque lo mas posible los datos a la incógnita. En el límite, esta última dejará de serlo. Para ello se hace uso de las relaciones que vinculan los datos entre sí y con la incógnita. En ciencias exactas o ingeniería, las relaciones serían ecuaciones que provienen de las condiciones geométricas, restricciones de tipo físico, etc. Para este caso se hacen algunos intentos que permitan llegar a la solución por prueba y error. Por ejemplo, de acuerdo al enunciado del problema se pueden unir los recipientes 1 y 1´. Evidentemente, esto corta toda posibilidad de unión para los otros dos pares. Intente otras posibilidades…

Ejecución del plan.

Este es el paso que se debe llegar dar para encontrar la solución al problema o, decididamente, a decir que no la tiene. Se cuenta con información que fue provista por el anterior paso: gráficos, esquemas, fórmulas, datos experimentales, etc. Rever lo realizado, revisando minuciosamente el enunciado y los planes realizados hasta ese entonces.

¿Ve que el problema queda resuelto?

Es importante observar que un problema auxiliar puede permitir un camino que conduzca a la solución del planteado inicialmente. La Ref. 4 provee argumentos por los cuales se podría pensar que es muy difícil resolver un problema absolutamente nuevo si no se tienen los medios de relación que lo vinculen con un problema anteriormente ya resuelto con el cual se pueda asociar. La idea brillante por la cual se puede resolver rápidamente, no debe ser excluida como posible. Mire la figura 5:

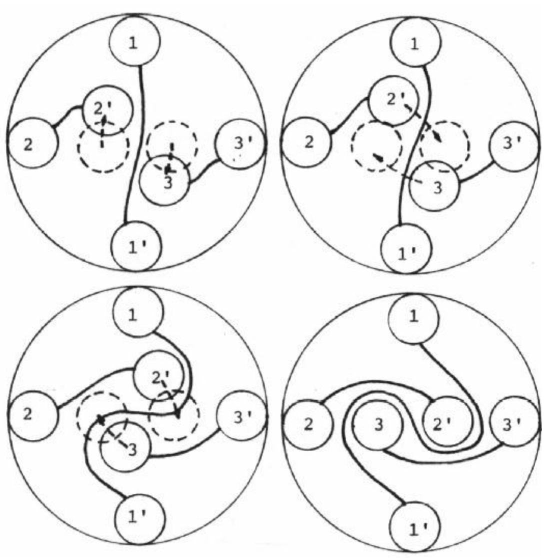

Figura 5

Volviendo atrás.

Este paso es de fundamental importancia: permite sacar el máximo provecho del esfuerzo realizado para resolver un problema. Para los casos numéricos se reemplaza la incógnita como dato y, si todo fue realizado correctamente se llegará a encontrar exactamente el mismo valor para los datos primitivos, suponiendo una cierta reversibilidad o simetría del problema. Es decir, se verifica la validez de la solución. También podrá explicarse el porqué de los procedimientos seguidos o los errores cometidos. Podría decirse que el error proviene del hecho que es natural la tendencia a confundir números cardinales con ordinales, como si 1 y 1´ significaran “unir primero 1 con 1´”.

EL PROBLEMA DE SÓCRATES Y EL ESCLAVO

Un problema auxiliar para resolver el teorema de Pitágoras, mediante algún método sencillo y didáctico, es el que se transcribe a continuación (5): se pide duplicar el área de un cuadrado mediante la construcción de otra figura de la misma forma.

En forma de diálogo:

Sócrates:- Quedábamos en que teníamos aquí un espacio de cuatro metros cuadrados, ¿no es esto? (en la Figura 6 le muestra el cuadrado de área inicial).
Esclavo:- Sí.

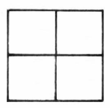
Figura 6

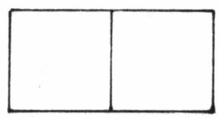
Figura 7

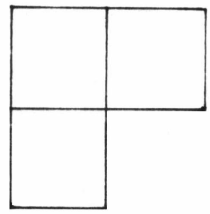
Figura 8

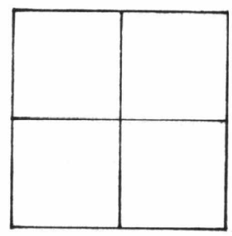
Figura 9

En lo que resta se abrevia la palabra Sócrates mediante "S." y Esclavo con "E.":

S.:- Al que podemos añadir este otro que le es igual, ¿no es esto? (Figura 7, en la que le da la idea de duplicación del área).
E.:- Sí.
S.:- Y aún este otro, igual a cada uno de los dos anteriores, ¿verdad? (Figura 8).
E.:- Sí.
S.:- Y en seguida llenar este espacio que queda vacío (Figura 9).
E.:- Por supuesto.
S.:- ¿Y no tenemos ahora cuatro espacios iguales?
E.:- Sí.
S.:- ¿Y cuántas veces los cuatro juntos son más grandes que éste? (Figura 6).
E.:- Cuatro.
S.:- Pero lo que buscábamos era un espacio doble, ¿recuerdas?
E.:- Claro que recuerdo.

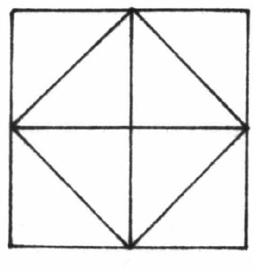
Figura 10

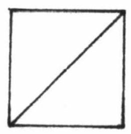
Figura 11

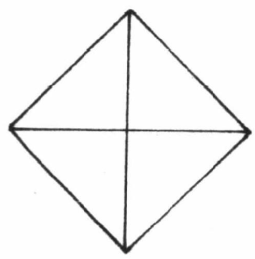
Figura 12

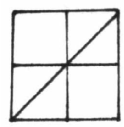
Figura 13

S.:- Y esta línea que trazamos de un ángulo a otro en cada cuadrado (Figura 10), ¿no los corta en dos partes iguales?
E.:- Sí.
S.:- Pues aquí tenemos cuatro líneas iguales que forman un nuevo cuadrado.
E.:- Ya lo veo.
S.:- Piensa ahora, ¿en qué a disminuido este cuadrado? (figura 10).
E.:- No sé.
S.:- Vamos a ver, ¿ha separado o no cada una de estas líneas en cada uno de los cuadrados una mitad hacia adentro? (figura 11).
E.:- Sí.
S.:- ¿Y cuántas mitades de éstas hay en el cuadrado que resulta en el centro?

E.:- Cuatro.
S.:- ¿Y en este? (Figura 12).
E.:- Dos.
S.:- ¿Y qué es cuatro respecto a dos?
E.:- El doble.
S.:- ¿cuántos metros cuadrados tiene, pues, este cuadrado? (Figura 12).
E.:- Ocho.
S.:- ¿Y sobre qué línea está construido?
E.:- Sobre ésta.
S.:- ¿Sobre la línea que va de un ángulo a otro en el cuadrado de cuatro pies? (Figura 13).
E.:- Sí.

Es así como la Figura 10 servirá como medio de relación para vincular este problema ya resuelto con el que se enuncia en la sección siguiente.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

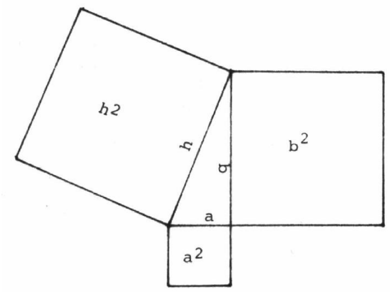

Figura 14

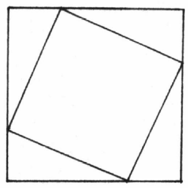

Figura 15

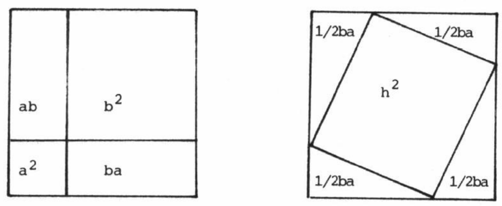

Figura 16

A diferencia del anterior, que es el teorema aplicado al caso especial en que los catetos son iguales, se quiere demostrar ahora que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre el cateto menor más el correspondiente al mayor, es igual al que se construye sobre la hipotenusa (Figura 14).

Se seguirán los pasos indicados por Polya (6) para resolverlo, el cual es muy similar al que emplea Sócrates con el esclavo (el de la dialéctica).

"¿Cuál es la incógnita?"

El área construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, consistente en un cuadrado de lado igual a dicha hipotenusa.

"¿Cuáles son los datos?"

La base y la altura del triángulo (catetos).

"¿Cuál es la relación entre datos e incógnita?"

Introduciendo la notación "*h*" para la incógnita, "*b*" y "*a*" para los datos, se debe demostrar que

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Método analítico:

"Trate de resolver primero algún problema relacionado".

Aquí conviene observar la Figura 10 que muestra un caso particular y que se puede emplear para realizar la Figura 15 que es la generalización de la anterior. Usando la notación mencionada para mostrar los datos del triángulo y mediante un truco "de ingenio", se debe ver que la superficie del cuadrado de lado $a + b$ es igual a la suma de la de cuatro triángulos y un cuadrado que se encuentran inscriptos en el primero (Figura 16). Sabiendo que la superficie del cuadrado de lado $a + b$ es

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad \text{(parte izquierda de la Figura 16)} \qquad (1)$$

y que, como la de cada triángulo es: $\frac{1}{2}\,ba$, será:

$$(a + b)^2 = 4(\tfrac{1}{2}\,ba) + h^2 = 2ab + h^2 \qquad (2)$$

Como los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) son la misma cosa los segundos lo serán entre sí:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + h^2$$

Esta ecuación muestra el término $2ab$ en ambos miembros y, si se suprime de ambos a la vez, dará por resultado la ecuación buscada:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Método gráfico

La Figura 17 muestra una secuencia gráfica para llegar al mismo resultado. Partiendo desde una figura exactamente igual a la número 15, se toman los triángulos A y B y se los desplaza dentro del cuadrado de superficie h^2 para hacer que coincidan sus diagonales con las de A' y B'. Borrando las líneas diagonales queda determinada la figura de la derecha y, a partir de ésta, "simplificando superficies iguales" (los triángulos A y A' con el paralelogramo de superficie *ab* y los B y B' con el de superficie *ba*), resulta lo buscado.

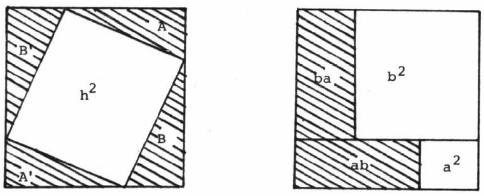

Figura 17

EXPERIENCIA APLICADA A UN CURSO DE FÍSICA

Con el objeto de enseñar a los alumnos a plantear y resolver problemas de la materia, se comienza con la resolución de problemas de ingenio. En la clase siguiente se presentan problemas de ingenio, pero aplicados a la Física. Estos se buscan entre los que pueden ser resueltos mediante la realización de algunos cálculos sencillos, de modo que sean una transición entre los anteriores (Anexo I) y los habituales problemas "arduos y aburridos" (ver Anexo II).

A partir de la tercera clase práctica, el contenido de las guías de trabajos prácticos es el mismo que el habitual (problemas planteados por los distintos autores de la bibliografía que se usa en los primeros cursos de Física). Las guías de problemas resueltos son los que se suelen presentar a continuación de las clases teóricas, como aplicación.

RESULTADOS

Se observa una total participación y entusiasmo por parte de los concurrentes, demostrando así el interés por ese tipo de actividad.

Se encuentra que pedir explicaciones de los razonamientos en forma escrita no se cumple por la mayoría, evidenciando dificultades en la correcta expresión de los pensamientos.

El fin primordial perseguido, que es ayudar al estudiante a encontrar la vía del razonamiento en lugar de la memorización -a que se suele acostumbrar al alumno de la escuela media- y el logro de la dedicación al estudio en forma más entusiasta, se estima que apenas se cumple. Pero aquí el rol de los auxiliares es fundamental para ayudarlos.

MÉTODO SUGERIDO

La generalidad de los estudiantes asume una postura poco decidida ante los problemas que se les plantea: luego de leer apresuradamente el enunciado –seguramente sin entenderlo- levantan la mirada para dar por terminado el asunto con un "no lo entiendo" o "es muy difícil para mí" y si se trata de un examen o prueba escrita, la búsqueda se orienta hacia algún método ilícito para obtener la solución.

Asumiendo la responsabilidad que corresponde, es de esperar que la situación arriba mencionada sea debida a la mala formación que recibe el individuo en las aulas.

Dejando de lado aquello de que "el poder de la enseñanza es a veces insuficiente, salvo en aquellos casos felices en que es casi superflua" (3) y aceptando que cada persona dispone de los medios de relación que le permiten resolver un problema partiendo de datos conocidos; el papel del docente es fundamental: el profesor debe ayudar sin perturbar al alumno que no está capacitado para hacer su trabajo poniéndose en su lugar haciéndole la mismas preguntas que a él se le pudieran ocurrir (6).

Si el profesor dedica su tiempo de trabajo para instruir a sus alumnos en operaciones de rutina les estará matando su interés pues de esa forma entorpecerá su desarrollo intelectual haciendo un mal uso de sus oportunidades. Pero si él desafía la curiosidad de sus alumnos dándoles problemas proporcionales a sus conocimientos y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, les proporcionará la forma de llegar a pensar independientemente y a adquirir el gusto por ello (6).

Se debe hacer una advertencia importante: en la resolución de problemas no siempre el conocimiento del mecanismo que puede regular la llegada a la solución es positivo. Existe latente el peligro de que la toma de conciencia de dichos pasos distraiga la atención entorpeciendo la tarea por dispersar fuerzas que debieran concentrarse en el trabajo de resolver y no en el de la auto-observación para saber si se lo está haciendo bien. Nuevamente es al docente al que le toca poner atención en este punto para evitar errores.

Cuando se trata de llevar un curso de modo tal que se logre un buen rendimiento y nivel, es indudable la importancia que tiene la presentación del mismo en el primer día de clases. Los juegos de ingenio sirven para infundir el entusiasmo inicial necesario para un buen comienzo. Dichos problemas deberán ser cambiados por los específicos en la materia en forma gradual (ver Anexo II) de modo que, en un momento dado, la totalidad de los mismos consista en los problemas "arduos y aburridos" del curso normal.

Se pondrá énfasis en que si se mide la capacidad de resolver problemas por la aptitud que posee una persona para relacionar conceptos diversos (datos) para llegar a un nuevo concepto (incógnita) generado a partir de los primeros, se podría aumentar dicha capacidad aumentando la agilidad para relacionar. ¿Cómo?, simplemente entrenando al individuo en la actividad propuesta, empezando con problemas que no requieran mayores conocimientos especializados, salvo los que provee un buen sentido común.

Se hará notar que para resolver los problemas de Física es necesario contar con algo más que un buen sentido común, es decir, "hay que conocer el puñado de leyes básicas" (1) que, bien empleadas, son las armas que permiten resolver los problemas particulares. Sumando a éstas el conocimiento del procedimiento de cómo hacerlo - que, como se señaló antes, en general no se enseña o muestra- aumentará la posibilidad de llegar a los resultados esperados.

9. REFERENCIAS

(1) Alonso, M. y Finn, E.: "Física. Vol. I Mecánica". Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1970.

(2) Davis, G.A. y Scott, J. A.: "Estrategias para la creatividad". Paidós. 1975.

(3) Feynman, R.: "Feynman´s Lectures on Physics". Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1971.

(4) Machado, L. A.: "La revolución de la inteligencia". Seix Barral, Barcelona. 1975.

(5) Platón: "Diálogos". Ediciones Ibéricas. Madrid. (Capitulo correspondiente al "Menón").

(6) Polya, G.: "How to solve it". Anchor Book A 93, Doubleday. 1957.

(7) Polya, G.: "Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving". John Wiley & Sons, Inc. 1967.