Propagación de errores: Mediciones y cálculo de la densidad de un cuerpo regular

Fecha: Sábado 20 de agosto de 2011.

Autor: Juan Pérez

Lugar: Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta

Física 1

Comisión número: 3

Libreta universitaria: 403

Resumen

Se midió la densidad de un objeto prismático recto (de madera o vidrio) mediante regla y balanza. Con la teoría de **propagación de errores** se determinó cuantitativamente la **precisión** de la medida.

Introducción teórica

Todas las medidas realizadas están afectadas por errores experimentales. Estos se clasifican en sistemáticos, de apreciación y casuales o accidentales. Para el caso de este trabajo -medir una densidad en forma indirecta- se determinaron los errores de apreciación de los instrumentos usados (la regla y la balanza) y, por propagación, se halló el error correspondiente a la densidad.

Fórmula de la densidad

La densidad de un cuerpo homogéneo se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Por otro lado, si el cuerpo es un prisma recto de base rectangular de altura h, base b y espesor L, su volumen es:

$$V = bhL$$

Por lo tanto, la densidad es:

$$\rho = \frac{m}{bhL}$$

Propagación errores

Como la magnitud ρ es función de las variables b, h, L y m:

$$\rho = \rho(b, h, L, m)$$

Si se conocen los errores de apreciación, que denominamos Δb, Δh, ΔL y Δm; de sus mediciones respectivas se obtendrán:

$$\begin{aligned} b &= \bar{b} \pm \Delta b \\ h &= \bar{h} \pm \Delta h \\ L &= \bar{L} \pm \Delta L \\ m &= \bar{m} \pm \Delta m \end{aligned}$$

Donde $\bar{b}$, $\bar{h}$, $\bar{L}$ y $\bar{m}$ son los valores medios o más probables que se midieron con regla y balanza.

Si se reemplazan en $\rho = \rho(b, h, L, m)$:

$$\rho = \rho(\bar{b} \pm \Delta\bar{b}, \bar{h} \pm \Delta h, \bar{L} \pm \Delta L, \bar{m} \pm \Delta m)$$

Se tendrá, aproximadamente:

$$\rho \approx \rho(\bar{b}, \bar{h}, \bar{L}, \bar{m}) \pm \Delta\rho$$

y el error relativo para ρ resultará ser:

$$\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}} + \frac{\Delta m}{\bar{m}}$$

con

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{b}, \bar{h}, \bar{L}, \bar{m}) = \frac{\bar{m}}{\bar{b}.\bar{h}.\bar{L}}$$

Pues se aplica la *regla* que una variable producto (o cociente) de otras, como lo es ρ, tiene un error relativo ε_ρ igual a la suma de los errores relativos de las variables intervinientes, tomadas tantas veces como el exponente que tienen:

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_m + \varepsilon_b + \varepsilon_h + \varepsilon_L$$

Teniendo en cuenta todo esto, resulta que:

$$\Delta\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{b}.\bar{h}.\bar{L}} \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}} \right)$$

y, finalmente:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho$$

Resultados experimentales

Se determinaron primeramente los errores de apreciación de la regla y la balanza. Como la apreciación de la regla es de $1mm$ y lo que podemos ver (error de apreciación del observador) la mitad:

$$\Delta b = \Delta h = \Delta L = 0,5mm = 0,05cm$$

pues $1mm = 1cm/10 = 0,1cm$; con lo cual $0,5mm = 0,5 \times 0,1cm = 0,05cm$.

Para la balanza usada:

$$\Delta m = 0,5g$$

La figura siguiente (de Y. Serapio) muestra el objeto medido y los resultados respectivos:

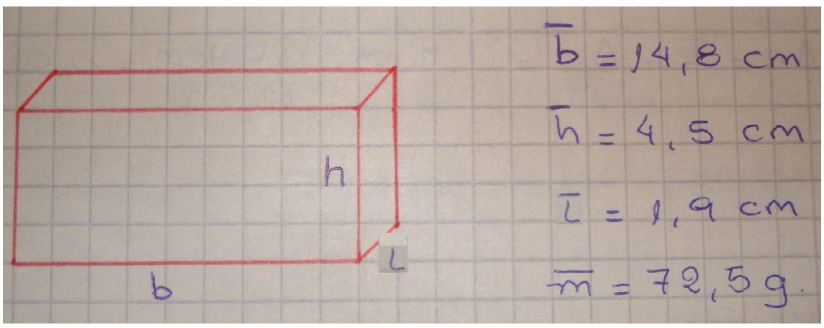

Figura 1: dimensiones del paralelepípedo.

Por su parte, la Tabla 1 organiza las magnitudes medidas (de Y. Serapio):

Valores leídos ($\bar{L}$ cm)		Error de Apreciación (ΔL)	Resultado de su medición $\bar{L} \pm \Delta L$
$\bar{b}$	14,8 cm	0,05 cm	(14,8 ± 0,05) cm
$\bar{h}$	4,5 cm	0,05 cm	(4,5 ± 0,05) cm
$\bar{e}$	1,9 cm	0,05 cm	(1,9 ± 0,05) cm

Valor leído		Error de Apreciación Δm	Resultado de la medición $\bar{m} \pm \Delta m$
$\bar{m}$	72,5 g	0,5 g	(72,5 ± 0,5) g

TABLA Nº 1 : resultados experimentales.-

El resultado del cálculo de la densidad es:

$$\bar{\rho} = \frac{72,5g}{14,8cm \times 4,5cm \times 1,90cm} = 0,573$$

y

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \bar{\rho}\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}}\right) = \\ &= 0,573\left(\frac{0,5}{72,5} + \frac{0,05}{14,8} + \frac{0,05}{4,5} + \frac{0,05}{1,90}\right) \\ &= 0,03g/cm^3 \end{aligned}$$

Luego:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho = (0,573 \pm 0,03)g/cm^3$$

y el error relativo, es:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{0,03}{0,573} \approx 0,05$$

o sea que, el error porcentual resulta:

$$\varepsilon_\rho\% = 100\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \approx 100 \times 0,05 = 5\%$$

Contribución relativa de los errores

Si se desglosa el aporte de cada medida directa al error de la densidad, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{\bar{m}} &= \frac{0,5}{72,5} = 7 \times 10^{-3} \\ \frac{\Delta b}{\bar{b}} &= \frac{.05}{14.8} = 3 \times 10^{-3} \\ \frac{\Delta h}{\bar{h}} &= \frac{.05}{4.5} = 1 \times 10^{-2} \\ \frac{\Delta L}{\bar{L}} &= \frac{.05}{1.90} = 3 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

de todos éstos, el mayor es 3×10^{-2}, que corresponde a la medida del espesor. Si quisiéramos que éste fuera del orden del que se obtiene para la masa, igual a 7×10^{-3}, debiéramos usar una regla cuya apreciación sea tal que:

$$\frac{\Delta L}{\bar{L}} = \frac{x}{1.90} = \frac{\Delta m}{\bar{m}} = \frac{0,5}{72,5} = 7 \times 10^{-3}$$

o sea que:

$$\frac{x}{1.90} = 7 \times 10^{-3} \Longrightarrow x < 0,01cm$$

Ello se podría obtener con un calibre o vernier, como puede verse en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Calibre_(instrumento)

1 Conclusiones

El error cometido al medir la densidad es menor que el 6%, siendo la mayor fuente de error la que se tiene en la regla a pesar de que su apreciación es de $0,05g$.

Para hacerlos equiparables a los errores, la apreciación del instrumento usado para medir las longitudes debiera ser menor que $0,01cm$.

Consultando una tabla de constantes físicas de los sólidos, se concluye que el paralelepípedo cuya densidad medida fue de aproximadamente $0,6g/cm^3$, corresponde efectivamente a la madera (tipo pino), pues la densidad de esta es 0,6-0,9 g/cm^3, según la tabla de

http://es.wikipedia.org/wiki/Densidad.

La precisión de la medición es:

$$\kappa = \frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho} = \frac{0.573}{0.03} = 19.1$$

Y significa que se afectan $19.1g/cm^3$ por cada g/cm^3 de error que se cometa.

Para leer más: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/medidas/medidas.htm.