LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CÍRCULO

Víctor Passamai y Teresita Passamai
Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamentos de Matemática y Física
Avda. Bolivia 5150 – 4400 Salta
passamai@unsa.edu.ar

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica, implementada y probada durante varios años, para ayudar a alumnos de los primeros cursos de Matemática y/o Física de nivel polimodal, terciario y universitario en el aprendizaje y comprensión de las fórmulas que involucran el número π: la circunferencia y el círculo. Estas fórmulas suelen ser necesarias tanto en cursos de Matemática como de Física para avanzar en el desarrollo de los contenidos básicos y los alumnos no las recuerdan o dicen no haberlas visto. Partiendo de conceptos simples, claros y familiares para la mayoría, se puede lograr su aplicación y que no se olviden de ellas a largo plazo.

Introducción

Este trabajo surgió ante las dificultades que presentan la mayoría de los alumnos para comprender, y retener, las sencillas fórmulas $C = 2\,\pi\,r$ y $S = \pi\,r^2$, necesarias para cursos de matemática y el inicio del estudio de la Física elemental, especialmente para las aplicaciones del Cálculo, Movimiento Circular o el Teorema de Gauss, del tema Electrostática, que se suele desarrollar en las materias de Matemática y Física de Ciencias e Ingenierías inclusive.

Por otra parte, la inquietud por la "rectificación de la circunferencia" o la "cuadratura del círculo", en el sentido de la geometría elemental, es decir el construir una línea cuya longitud sea la de la circunferencia, o buscar el cuadrado equivalente que tenga la misma área del círculo; parecen ser un buen punto de inicio para motivar su estudio, principalmente por el hecho que en la antigüedad se decía que el segundo problema "no tenía solución", y actualmente en cambio se dice que se resuelve mediante el cálculo integral (Salvat, 1966; Rey, J. et al., 1963; Sadosky, M. y de Guber, R., 1970), aunque se admite que en la práctica es necesario valerse de una computadora, pues sino el cálculo desde cero sería muy laborioso, como se pretende ilustrar en este trabajo.

En diversos sitios de la red global (Internet), se encuentran cuestiones tales como: "¿Es posible, utilizando tan sólo la regla y compás, construir un cuadrado que tenga exactamente la misma área que un circulo dado? Respuesta: no y 1000 veces no! Aunque ya se ha demostrado que esta construcción exacta es imposible podemos encontrar construcciones de aproximaciones muy interesantes. Legiones de grandes matemáticos y aficionados se han dedicado a buscar demostraciones gráficas aproximadas de π. Estas demostraciones son encantadoras, y lejos de intentar demostrar que podríamos llegar a "la cuadratura exacta del círculo" sirven para afinar el ingenio en la geometría." También se dice: "La cuadratura del círculo es un problema insoluble pero divertido".

En este trabajo se tratará de mostrar que no son problemas resolubles exactamente, incluso desde el punto de vista numérico aproximado y que, no obstante, es útil y necesario conocer que existe una vía de desarrollo que permite visualizar la problemática y presentarla a los estudiantes.

Dicha vía elegida involucra el uso de planillas de cálculo, difundidas desde el advenimiento de la computación personal en la década de 1980.

Cuando se dice que mediante el cálculo se deduce la longitud de la circunferencia, ya se tiene preestablecido π sin comprobación o un razonamiento deductivo, sabiéndose que se puede tomar el valor *3,14* (o con más dígitos según la rigurosidad del cálculo).

En este trabajo no se pretende hacer mensurable lo que no lo es, por ser π un irracional, ni tampoco elaborar una demostración rigurosa desde el punto de vista axiomático de la geometría plana. Más bien, en todo caso, se quiere usar herramientas que parten de la aplicación y conocimiento del teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas (que suelen recordar y manejar), para mostrar una deducción que podría hacerse laboriosamente mediante lápiz y papel, pero que se simplifica y hace más rápidamente con el uso de planillas de cálculo.

Metodología empleada para la demostración

a) Caso de la circunferencia

Se trazan polígonos inscritos y circunscritos en relación a una circunferencia dibujada en el pizarrón. Con ello, para calcular su longitud, se sigue un proceso de límite, sin necesidad del conocimiento previo o estrictamente formal de este último concepto. Se debe tener en cuenta el uso del lenguaje, pues es posible que los alumnos no entiendan –o no recuerden- la palabra "polígono", por ejemplo.

Un gráfico ayuda mucho para describir lo que se quiere mostrar y el que se propone aquí se presenta en la figura 1. La misma suele ser suficiente para persuadir acerca de lo elemental del problema.

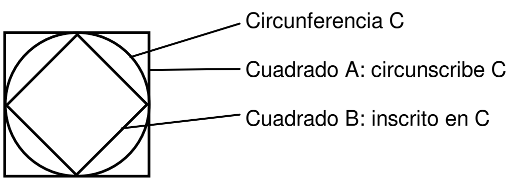

Figura 1: Circunferencia C y cuadrados A y B.

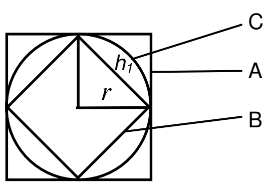

Figura 2: Hipotenusa h_1 y cateto r.

En este caso se comienza con el trazado de la circunferencia –que se denomina *C*- y los cuadrados *A* (que la circunscribe) y *B* (que está inscrito en ella). Como se conoce cómo calcular el perímetro de un cuadrado, se parte de la suposición –razonable- que la longitud de aquélla está comprendida entre la de *A* y *B*. Un paso más adelante, se da al aceptar que una primera *aproximación* de la longitud de *C* es la *semisuma* de los *contornos* de *A* y *B*.

De acuerdo con la figura 2, se establece que el radio mide *r*. En Física se dirá que *r* está expresado en *metros*. Para calcular la longitud del cuadrado inscrito, en términos de *r*, se observa la validez de la igualdad: $h_1^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$. De esto se obtiene el perímetro de *B*.

El perímetro de *A*, de la misma figura 2, se obtiene fácilmente pues su lado es el diámetro.

Con todo esto, la longitud promedio de los dos cuadrados, y por lo tanto la primera aproximación de la longitud *C*, resulta:

$$\boxed{C \simeq \frac{4\sqrt{2}\,r + 4 \times 2r}{2} = 2\left(\sqrt{2}\,r + 4r\right) = 2\left(\sqrt{2} + 4\right)r}$$

El valor entre paréntesis es *3,4142* y excede a π en un 8 %.

Esto crea la necesidad de ajustar con otros dos polígonos, uno que se inscriba y otro que circunscriba a la circunferencia, y se elige hacerlo, a partir de la figura 1, observando la región delimitada por el ángulo superior izquierdo del cuadrado *A* y el lado superior izquierdo del cuadrado *B* pues, al trazar la tangente al punto medio del arco de la circunferencia *C* encerrado en dicha región, como se detalla en la secuencia de la figura 3, surge naturalmente un octógono. O sea que se busca mejorar con el doble de lados que antes. Esto lo indican las figuras 4 y 5.

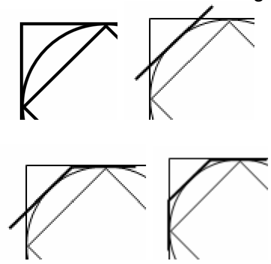

Figura 3: Tangentes en C.

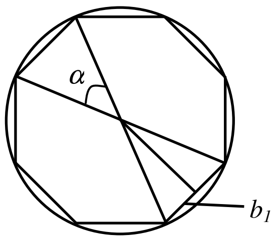

Figura 4: Octógono inscrito.

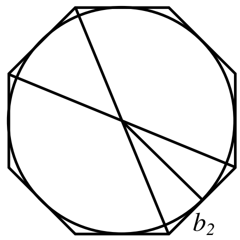

Figura 5: Circunferencia circunscrita.

En la figura 4, el subíndice *1* de b_1 se refiere al carácter de inscrito. Análogamente, en la figura 5 el subíndice *2* sirve para denotar el lado del polígono que circunscribe. En estas se ha indicado un triángulo isósceles con la base igual al lado del polígono. Además se trazó una bisectriz hasta el punto medio de la base de dicho triángulo. Con esto se busca un triángulo rectángulo con el cual trabajar.

En la figura 4 se considera el ángulo α que es igual a *180°/4*, cuya mitad permite calcular b_1:

$$\boxed{sen(\frac{\alpha}{2}) = sen(\frac{180°}{8}) = \frac{b_1/2}{r} \Rightarrow b_1 = 2r \times sen(\frac{180°}{8})}$$

Para no introducir π, se usa el ángulo llano en grados. Por otro lado, si bien se puede objetar que, al realizar el cálculo del seno con calculadora se está implícitamente haciendo uso de π, debe recordarse que el alumno maneja estos cálculos y lo que se desea es que visualice la generación de π de alguna manera, como se muestra.

La longitud de la circunferencia aproximada por defecto se calcula como sigue:

$$\boxed{C_1^8 \simeq 8b_1 = 8 \times 2r \times sen(\frac{180°}{8}) = 2 \times 3,0615r}$$

Donde el supraíndice 8 indica el polígono (octógono), el subíndice *1* el carácter de inscripto y el número *3,0615* comienza a parecerse más a *3,1416.* Para el octógono que circunscribe la circunferencia, mostrado en la figura 5, se puede observar que:

$$\boxed{tg(\frac{180°}{8}) = \frac{b_2/2}{r} = \frac{b_2}{2r} \Rightarrow b_2 = 2r \times tg(\frac{180°}{8})}$$

y luego:

$$\boxed{C_2^8 \simeq 8 \times 2r \times tg(\frac{180°}{8}) = 2 \times 3,3137r}$$

El valor *3,3137* excede a *3,1416* por ser la longitud de este octógono superior al de la circunferencia que circunscribe.

El promedio se aproxima mejor, como puede verse a continuación:

$$\boxed{C \simeq C^8 = \frac{(C_1^8 + C_2^8)}{2} = 2 \times 3,1876r}$$

El error aproximado es:

$$100\frac{|\pi - 3{,}1876|}{\pi} \simeq 1.4645\,\%$$

El procedimiento sigue, con la subdivisión en porciones que son mitades de las anteriores, o sea que se pasa ahora a un conjunto de 16 triángulos cuyo ángulo menor central es ahora *180°/16*. Entonces, los valores por defecto y por exceso de la longitud de la circunferencia son ahora:

$$C_1^{16} = 16 \times 2r \times sen(\frac{180°}{16}) \text{ y } C_2^{16} = 16 \times 2r \times tg(\frac{180°}{16})$$

El cálculo de π, en base al promedio de esta nueva aproximación es igual a *3.152*. El error del promedio, en este caso, es menor que el 4 ‰.

Continuando de este modo, se obtiene la sucesión de polígonos cuyo número de lados es 4, 8, 16, etc. Para obtener una fórmula de recurrencia, posible de ser empleada con una planilla de cálculo, es necesario resaltar la relación con los naturales. O sea:

$$4, 4 \times 2, 4 \times 4, \ldots = 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{n+1}$$

(se hace esto para ver la ley de formación). Entonces:

$$C_1^{2^{n+1}} = 2 \times 2^{n+1} sen(\frac{180°}{2^{n+1}})r \text{ y } C_2^{2^{n+1}} = 2 \times 2^{n+1} tg(\frac{180°}{2^{n+1}})r$$

Si se introducen estos en una planilla de cálculo, se pueden calcular los sucesivos términos de cada sucesión. Para una circunferencia de radio igual a 1/2, su longitud es justamente el número π. Entonces se puede obtener la tabla de la figura 6.

5 +B5*C5

A	B	C	D	E	F	G
n	2^(n+1)	sen(180/2^(n+1))	C1	tg(180/2^(n+1))	C2	(C1+C2)/2
1	4	0.707106781187	2.8284271247462	1	4	3.4142135623731
2	8	0.382683432365	3.0614674589207	0.4142135624	3.3137084989848	3.1875879789527
3	16	0.195090322016	3.1214451522581	0.1989123674	3.1825978780745	3.1520215151663
4	32	0.09801714033	3.1365484905459	0.0984914034	3.1517249074293	3.1441366989876
5	64	0.049067674327	3.1403311569548	0.0491268498	3.1441183852459	3.1422247711003
6	128	0.024541228523	3.1412772509328	0.0245486221	3.1422236299425	3.1417504404376
7	256	0.012271538286	3.1415138011443	0.0122724624	3.141750369169	3.1416320851566
8	512	0.006135884649	3.1415729403671	0.0061360002	3.1416320807032	3.1416025105351
9	1024	0.003067956763	3.1415877252772	0.0030679712	3.1416025102568	3.141595117767
10	2048	0.001533980186	3.1415914215112	0.001533982	3.1415951177496	3.1415932696304
11	4096	0.000766990319	3.1415923455701	0.0007669905	3.1415932696293	3.1415928075997
12	8192	0.000383495188	3.1415925765849	0.0003834952	3.1415928075996	3.1415926920923
13	16384	0.000191747597	3.1415926343386	0.0001917476	3.1415926920923	3.1415926632154
14	32768	9.5873799E-05	3.141592648777	9.58738E-05	3.1415926632154	3.1415926559962
15	65536	4.79369E-05	3.1415926523866	4.79369E-05	3.1415926559962	3.1415926541914
16	131072	2.396845E-05	3.141592653289	2.39684E-05	3.1415926541914	3.1415926537402
17	262144	1.1984225E-05	3.1415926535146	1.19842E-05	3.1415926537402	3.1415926536274
18	524288	5.9921125E-06	3.141592653571	5.99211E-06	3.1415926536274	3.1415926535992
19	1048576	2.9960562E-06	3.1415926535851	2.99606E-06	3.1415926535992	3.1415926535921
20	2097152	1.4980281E-06	3.1415926535886	1.49803E-06	3.1415926535921	3.1415926535904
21	4194304	7.4901406E-07	3.1415926535895	7.49014E-07	3.1415926535904	3.1415926535899
22	8388608	3.7450703E-07	3.1415926535897	3.74507E-07	3.1415926535899	3.1415926535898
23	1.7E+07	1.8725351E-07	3.1415926535898	1.87254E-07	3.1415926535898	3.1415926535898
24	3.4E+07	9.3626757E-08	3.1415926535898	9.36268E-08	3.1415926535898	3.1415926535898

Figura 6: Tabla obtenida del cálculo mediante planilla electrónica.

Analizando la tabla, se observan las columnas desde la A a la G con la secuencia natural *n*, el término 2^{n+1}, el cálculo de $sen(180°/2^{n+1})$, C_1 (indicado en la figura 6 como el producto de los anteriores, columnas B y C); luego $tg(180°/2^{n+1})$, C_2 (igual a 2^{n+1} $tg(180°/2^{n+1})$) y finalmente el promedio. Dado que la aproximación con que trabaja la planilla electrónica es de 16 cifras, a partir del término *n=22* se observa constancia del resultado.

A partir de allí, el error porcentual relativo al número π es menor o igual que una parte en 10^{13}. Con cuatro cifras significativas, el famoso 3,1416 aparece a partir de *n=7.* Su error porcentual relativo a π es un poco mayor que 2.10^{-4} *%.*

Resulta ilustrativo acerca de la tendencia al límite graficar el promedio entre C_1 y C_2. Ello se muestra en la figura 7.

La convergencia es mayor para el cálculo por defecto, pues el error porcentual es siempre menor que el determinado por exceso. Esta conclusión puede usarse para el cálculo del área del círculo.

b) Caso del círculo

Con la experiencia adquirida anteriormente, el cálculo del área del círculo resulta inmediato. En lugar de repetir la secuencia de cálculos desde el cuadrado, se puede comenzar con el octógono para generar la fórmula de recurrencia, siendo necesario agregar en la figura 4 la altura a_1 del triángulo, como se muestra en la figura 8. Esta altura se deduce de $cos(\alpha/2) = a_1/r$.

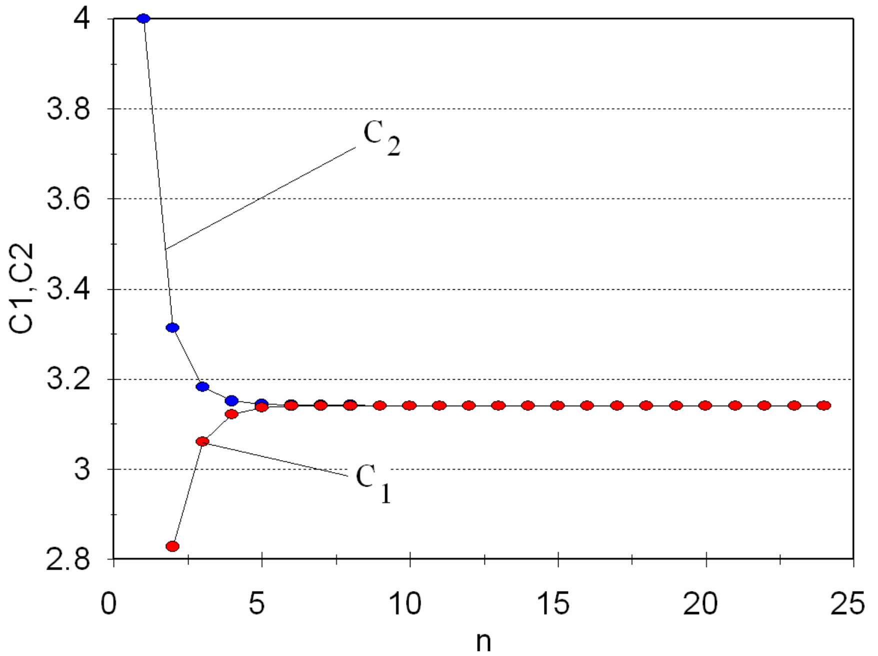

Figura 7: Convergencia de los valores calculados del número π por exceso y por defecto.

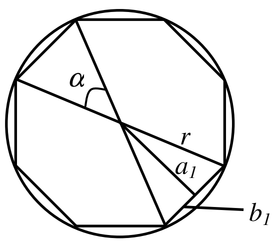

Figura 8: Altura a_1 a considerar para el círculo.

El área por defecto se obtiene calculando primero el del triángulo de altura a_1 y base b_1, dado por:

$$\tfrac{1}{2}\, a_1\, b_1 = \tfrac{1}{2}\, r \cos(180°/8)\ 2\, r\, sen\ (180°/8) = r^2 \cos(180°/8)\ sen\ (180°/8)$$

y se multiplica por *8*. Entonces:

$$\boxed{S_1^8 = 8 \times sen(\frac{180°}{8}) \times cos(\frac{180°}{8}) r^2}$$

De ésta es fácil hallar la fórmula de recurrencia general para el área de polígonos de 2^{n+1} lados inscritos en una circunferencia:

$$\boxed{S_1^{2^{n+1}} = 2^{n+1} \times sen(\frac{180°}{2^{n+1}}) \times cos(\frac{180°}{2^{n+1}}) r^2}$$

Como vale la conocida fórmula del ángulo doble:

$$sen 2\alpha = 2\ sen\alpha\ cos\alpha$$

la anterior se simplifica, para dar:

$$\boxed{S_1^{2^{n+1}} = 2^n sen(\frac{180°}{2^n}) r^2}$$

Al igual que antes, se puede construir una tabla con esta fórmula, para calcular el número π. Esta vez habrá que considerar un círculo de radio $r = 1$.

Conclusiones

El equivalente numérico de la cuadratura del círculo, a partir de las fórmulas de recurrencia encontradas, significaría encontrar una secuencia natural que de por resultado el lado de un cuadrado cuya superficie sea igual al del círculo. Como se ha encontrado dicha secuencia y tiende a πr^2, el cuadrado tendrá su lado igual a $\pi^{1/2} r$. Pero igualmente está basado en el número π.

De otra manera, se puede pensar en una secuencia dada por $2^{n/2}\ sen^{1/2}(180°/2^n)\ r$. Pero esto no es simplificar el problema.

Mejor es, en todo caso, pensar en una sucesión de polígonos inscritos en la circunferencia cuyo resultado, al límite, conduce a las fórmulas de la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

Para la primera, es elemental, pero conviene repetirlo: la longitud equivale a poco más que tres veces el diámetro (que es igual a dos veces el radio: $d = 2\, r$):

$$C = 3{,}14159... \times d = \pi\, d = 2\, \pi\, r$$

O sea que la imagen de la longitud de la circunferencia podría ser la que enseñaban las buenas maestras hace mucho tiempo, como se indica en la figura 9. Se observa el porqué de la denominación "rectificación de la circunferencia".

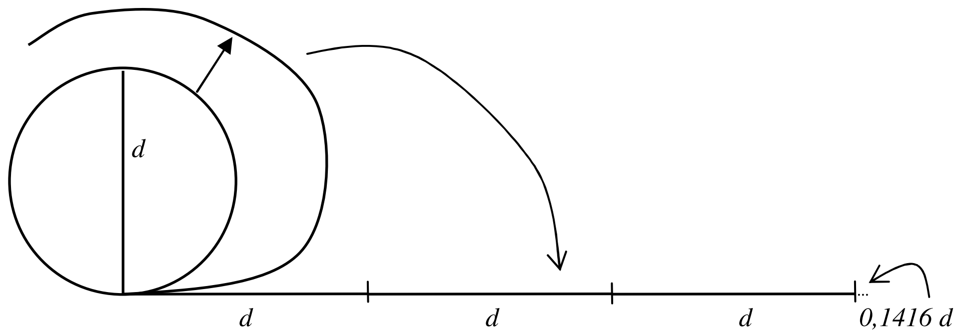

Figura 9: Rectificación de la circunferencia.

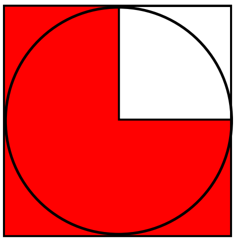

Figura 10: Área del círculo.

El círculo se define como “la superficie encerrada por la circunferencia”, por lo que decir “área del círculo” podría ser redundante. Dejando de lado esta cuestión, este área podría pensarse como poco más de tres veces el área del cuadrado construido sobre su radio:

$$S = 3{,}14159... \times r^2 = \pi r^2$$

Esta imagen se corresponde, aproximadamente, con la que se ilustra en la figura 10.

También puede pensarse al círculo como poco más de ¾ del área del cuadrado de lado igual al diámetro.

De realizarse mediante computadora, la cuadratura del círculo luce de la manera que lo muestra la figura 11.

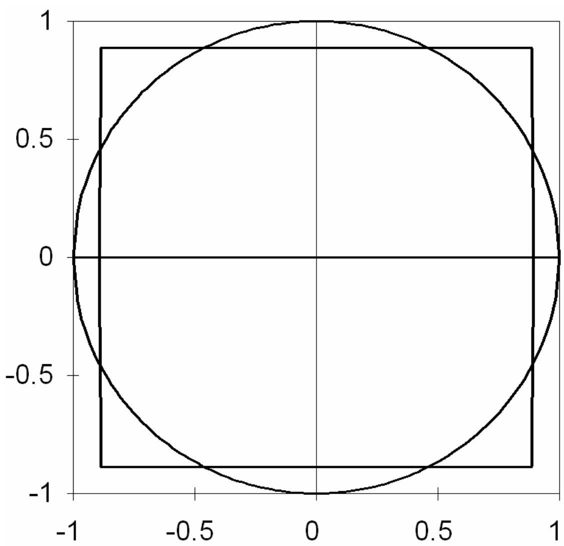

Figura 11: Cuadratura del círculo de radio unidad.

Referencias

Internet: Búsquedas en www.google.com bajo las palabras “cuadratura del círculo”, etc.

Rey, J., et al.: Análisis Matemático. Vol. I. 1963. Kapelusz.

Sadosky, M. y de Guber, R.: Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. 1970. Alsina.

Salvat Editores Argentina: Monitor. Enciclopedia. 1970.